

### **ESERCIZIO N° 1**

Sia  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo definito da:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, x_1 - x_2, hx_1 + hx_3).$$

Stabilire per quali valori di  $h$  l'endomorfismo  $\varphi$  è semplice.

---

La matrice associata a  $\varphi$  è:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ h & 0 & h \end{pmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico di  $\varphi$  è:  $|M(\varphi) - \lambda I| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ h & 0 & h-\lambda \end{vmatrix} = (h-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3] = (h-\lambda)(-1 + \lambda^2 - 3) = (h-\lambda)(\lambda^2 - 4)$$

Gli autovalori sono dunque le soluzioni reali del polinomio caratteristico:

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = h.$$

se  $h \neq \pm 2$  esse sono anche distinte; quindi  $\varphi$  è semplice;

se  $h = 2$ , gli autovalori sono  $\lambda_1 = 2$  con molteplicità 2;

$$\lambda_2 = -2 \text{ con molteplicità } 1.$$

Per stabilire se  $\varphi$  è semplice dobbiamo calcolare  $\rho(M(\varphi) - 2I)$

$$M(\varphi) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(M(\varphi) - 2I) = 2 \Rightarrow \dim V_2 = 3 - 2 = 1 \neq 2 \text{ (la molteplicità}$$

di  $\lambda_1) \Rightarrow \varphi$  non è semplice.

In maniera analoga se  $h = -2 \Rightarrow \varphi$  non è semplice.

### **ESERCIZIO N° 2**

Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da:

$$\varphi(x, y, z) = (-2hx - y + hz, x + z, hz)$$

è semplice.

---

La matrice associata a  $\varphi$  è:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} -2h & -1 & h \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico di  $\varphi$  è:  $|M(\varphi) - \lambda I| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2h-\lambda & -1 & h \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & h-\lambda \end{vmatrix} = (h-\lambda)[(-2h-\lambda)(-\lambda) + 1] = (h-\lambda)(\lambda^2 + 2h\lambda + 1)$$

Gli autovalori sono dunque le soluzioni reali del polinomio caratteristico:  
 Consideriamo il discriminante dell'equazione  $\lambda^2 + 2h\lambda + 1 = 0$ :  $\Delta = h^2 - 1 \Rightarrow$   
 l'equazione avrà soluzioni reali se  $\Delta \geq 0$ .

Allora:

- per  $-1 < h < 1$   $\varphi$  non è semplice perché non ha tutti gli autovalori reali.
- per  $h < -1 \vee h > 1 \Rightarrow \lambda_1 = h, \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - 1}, \lambda_3 = -h + \sqrt{h^2 - 1}$  con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  distinti; infatti:  $h = -h \pm \sqrt{h^2 - 1} \Leftrightarrow 2h = \pm \sqrt{h^2 - 1} \Leftrightarrow 4h^2 = h^2 - 1 \Leftrightarrow 3h^2 = -1 \Rightarrow$  impossibile  $\Rightarrow \varphi$  è semplice.
- per  $h = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$  semplice e  $\lambda_2 = -1$  doppia. Dobbiamo calcolare il rango di  $M(\varphi) + I$  ( $h = 1, \lambda = -1$ ):

$$M(\varphi) + I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ il rango è } 2 \Rightarrow \dim V_2 = 3 - 2 = 1 \neq 2 \text{ (la molteplicità}$$

di  $\lambda_2$ )  $\Rightarrow \varphi$  non è semplice.

- per  $h = -1 \Rightarrow \lambda_1 = -1$  semplice e  $\lambda_2 = 1$  doppia. Dobbiamo calcolare il rango di  $M(\varphi) + I$  ( $h = -1, \lambda = 1$ ):

$$M(\varphi) + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ il rango è } 2 \Rightarrow \dim V_2 = 3 - 2 = 1 \neq 2 \text{ (la molteplicità}$$

di  $\lambda_2$ )  $\Rightarrow \varphi$  non è semplice.

### **ESERCIZIO N° 3**

Sia  $\varphi : K^n \rightarrow K^n$  un isomorfismo. Dimostrare che:

- a) tutti gli autovalori di  $\varphi$  sono non nulli;
- b) se  $\lambda$  è un autovalore di  $\varphi$  allora  $\lambda^{-1}$  è un autovalore di  $\varphi^{-1}$

a) Sia  $\lambda$  un autovalore di  $\varphi \Rightarrow \exists v \in K^n, v \neq 0_{K^n} : \varphi(v) = \lambda v \neq 0_{K^n}$  perché  $\varphi$  è iniettiva  $\Rightarrow \lambda \neq 0$

b) Sia  $v \neq 0_{K^n}$  un autovettore associato a  $\varphi \Rightarrow$

$$\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow v = \varphi^{-1}(\lambda v) \stackrel{\varphi^{-1} \text{ è applicazione lineare}}{=} \lambda \varphi^{-1}(v) \Rightarrow \varphi^{-1}(v) \stackrel{\lambda \neq 0}{=} \lambda^{-1} v \Rightarrow \text{la Ts in quanto } v \neq 0_{K^n}$$

### **ESERCIZIO N° 4**

Sia  $\varphi : R^n \rightarrow R^n$  un isomorfismo semplice. Dimostrare che  $\varphi^{-1}$  è semplice.

Segue osservando che se  $v$  è un autovettore di  $\varphi$  allora  $v$  è un autovettore di  $\varphi^{-1}$

### **ESERCIZIO N° 5**

Stabilire se la seguente matrice reale è diagonalizzabile come matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3,3}$$

in caso affermativo, diagonalizzarla.

A è diagonalizzabile se e solo se  $\varphi_A : R^3 \rightarrow R^3$  è semplice. Il polinomio caratteristico

$$\text{di } A \text{ è } |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(3 - \lambda) \text{ ed ha le radici } \lambda_1 = 0 \text{ con}$$

molteplicità 2 e  $\lambda_2 = 3$  semplice. Per vedere se  $A$  è diagonalizzabile bisogna verificare se  $\rho(A - 0I) = 3 - 2 = 1$ . Ciò è vero, quindi  $A$  è diagonalizzabile.

Diagonalizzare  $A$  significa trovare una matrice invertibile  $P \in R^{3,3} : P^{-1}AP$  matrice diagonale. Basta prendere come  $P$  la matrice che ha per colonne  $v_1, v_2, \dots, v_n$  gli autovettori che insieme formano una base di  $R^3$  ( $\varphi_A$  è semplice)

Per  $\lambda = 0 \Rightarrow V_0 = \text{Ker } \varphi_A$  è l'insieme soluzione dell'equazione  $x + y + z = 0$

$(-y - z, y, z), y, z \in R \Rightarrow \text{Ker } \varphi_A = L((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$

Per  $\lambda = 3 \Rightarrow V_3 = \text{Ker } \varphi_{A,3}$  che è l'insieme soluzione del sistema

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$$

$(x, x, x), x \in R$

$\text{Ker } \varphi_{A,3} = L(1, 1, 1)$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Risulta inoltre :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che sulla diagonale vi sono gli autovalori 0 e 3 ciascuno ripetuto con la sua molteplicità.