

### ESERCIZIO N°1

Nello spazio sono dati il piano  $\pi: x - y + z + 1 = 0$ , la retta  $r: \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$  ed il punto

$A(1, 0, 1)$ .

Trovare:

- 1) la retta per A ortogonale ad r e parallela a  $\pi$ ;
- 2) la retta per A ortogonale ed incidente ad r.

1) la retta richiesta è l'intersezione dei piani  $\alpha$  e  $\beta$ , dove  $\alpha$  è il piano passante per A e parallelo a  $\pi \Rightarrow \alpha: (x - 1) - (y - 0) + (z - 1) = 0$  e  $\beta$  è il piano passante per A e perpendicolare ad r i cui numeri direttori sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} m \cdot 1 + n \cdot (-1) + p \cdot 0 = 0 \\ m \cdot 0 + n \cdot 0 + p \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = n \\ p = 0 \end{cases} (m, m, 0) \quad m \in \mathbb{R}^+$$

per  $m = 1$  ottengo  $1, 1, 0$

Alternativa: i numeri direttori di r si ottengono dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{\text{moltiplicando per } -1} \Rightarrow 1, 1, 0$$

$$\Rightarrow \beta: 1(x - 1) + 1(y - 0) + 0(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \cap \beta: \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

2) la retta richiesta è la retta congiungente A con il punto B intersezione di  $\beta$  con r:

$$B = \begin{cases} x = y \\ z = 1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow AB: \begin{cases} \frac{x-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}-0} \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Alternativa: la retta richiesta è l'intersezione dei piani  $\alpha$  e  $\beta$ , dove  $\alpha$  è il piano del fascio di asse r passante per A

### ESERCIZIO N°2

Sono assegnati il punto  $A(0, 1, 2)$ , la retta  $r: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$  ed il piano  $\pi: 2x + z - 1 = 0$ .

Trovare:

- 1) la retta  $r_1$  per A perpendicolare a  $\pi$ ;
- 2) il piano  $\alpha$  per A e perpendicolare ad r;
- 3) la retta s per A, parallela a  $\pi$  ed incidente con r;
- 4) la retta p proiezione ortogonale di r su  $\pi$ ;
- 5) il simmetrico di A rispetto a  $\pi$ .

1)  $r_1$  ha numeri direttori 2, 0 e 1 e passa per A; per cui le sue equazioni parametriche sono:

$$r_1: \begin{cases} x = 2t + 0 \\ y = 0t + 1 \\ z = 1t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2)  $r$  ha numeri direttori rispettivamente 1, -1, 0  $\Rightarrow \alpha: 1(x-0) - 1(y-1) + 0(z-2) = 0$   
 $\alpha: x - y + 1 = 0$

3) la retta  $s$  appartiene al piano  $\beta$  parallelo a  $\pi$  passante per A ed al piano  $\gamma$  del fascio di asse  $r$  passante per A  $\Rightarrow \beta: 2(x-0) + 0(y-1) + 1(z-2) = 0$

$$\beta: 2x + z - 2 = 0$$

L'equazione del fascio di piani di asse  $r$  è:  $\lambda(x+y) + \mu(z-2) = 0$  con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e  $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ; impongo il passaggio per A(0, 1, 2)  $\Rightarrow \lambda(0+1) + \mu(2-2) = 0 \rightarrow \lambda=0, \mu \neq 0$  sono le soluzioni  $\Rightarrow \gamma: z - 2 = 0$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} 2x + z - 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

4) la retta  $p$  è l'intersezione del piano  $\pi$  con il piano  $\delta$  del fascio di asse  $r$  perpendicolare a  $\pi$ . Perché  $\lambda x + \lambda y + \mu z - \mu 2 = 0$  sia perpendicolare a  $2x + z - 1 = 0$  occorre e basta che sia  $2\lambda + 0\lambda + 1\mu = 0$  è ciò è verificato per  $\lambda = 1$  e  $\mu = -2$

$$\Rightarrow \delta: 1(x+y) - 2(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow p: \begin{cases} x + y - 2z + 4 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

5) Sia C l'intersezione di  $r_1$  con  $\pi$ , A' è il simmetrico di A rispetto a  $\pi$  se e solo se C è il punto medio di AA'

$$2(2t) + (t+2) - 1 = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{5}$$

$$\text{Per } t = -\frac{1}{5} \rightarrow C\left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{9}{5}\right) \Rightarrow A' = \begin{cases} \frac{x+0}{2} = -\frac{2}{5} \\ \frac{y+1}{2} = 1 \\ \frac{z+2}{2} = \frac{9}{5} \end{cases} \rightarrow A'\left(-\frac{4}{5}, 1, \frac{8}{5}\right)$$

### ESERCIZIO N°3

Nel piano sono date le rette  $r: \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$  ed  $s: \begin{cases} x = \lambda \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$

a) determinare  $\lambda$  in modo che  $r$  ed  $s$  siano complanari e trovare il piano in cui stanno.

b) Nel caso  $\lambda = 0$ , dopo aver verificato che  $r$  ed  $s$  sono sghembe, trovare la retta  $s'$  di minima distanza.

$$a) \text{ r ed s sono complanari} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

Il piano  $\alpha$  in cui stanno r ed s è il piano del fascio di asse s passante per un punto di r:  $\lambda(x - 1) + \mu(y + 2z + 2) = 0$  (eq. del fascio di asse s) impongo il passaggio per  $O \in r \Rightarrow -\lambda + 2\mu = 0$ , una soluzione è  $\lambda = 2, \mu = 1$

$$\alpha: 2(x - 1) + y + 2z + 2 = 0 \rightarrow 2x + y + 2z = 0$$

b)  $0 \neq 1 \Rightarrow \lambda = 0$ , r ed s sono sghembe.

La retta  $s'$  è l'intersezione dei piani  $\beta$  e  $\beta'$  dove  $\beta$  e  $\beta'$  sono i piani rispettivamente dei fasci di assi r ed s paralleli alle rette che sono perpendicolari ad r ed s contemporaneamente.

I numeri direttori di r si ottengono risolvendo il sistema:  $\begin{cases} m = 0 \\ 1 + p = 0 \end{cases} \Rightarrow$  una soluzione è  $(1, 0, -1)$

I numeri direttori di s si ottengono risolvendo il sistema:  $\begin{cases} m' = 0 \\ 1 + 2p' = 0 \end{cases} \Rightarrow$  una soluzione è  $(0, -2, 1)$ .

I numeri direttori ortogonali ad r e ad s sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1m + 0n - 1p = 0 \\ 0m - 2n + 1p = 0 \end{cases} \text{ una soluzione è}$$

$$m = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad n = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad p = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \text{ e quindi } 2, 1, 2.$$

$\beta: \lambda y + \mu(x + z) = 0$ ;  $\mu x + \lambda y + \mu z = 0$  eq. del fascio di asse r.

Sia  $r'$  una retta di direttori 2, 1 e 2

$\beta // r' \Leftrightarrow 2\mu + \lambda + 2\mu = 0; \quad 4\mu + \lambda = 0$  una soluzione è  $\lambda = -4, \mu = 1$

$$\beta: x - 4y + z = 0$$

$\beta': \lambda(x - 1) + \mu(y + 2z + 2) = 0$ ;  $\lambda x + \mu y + 2\mu z - \lambda + 2\mu = 0$  eq. del fascio di asse s.

$\beta' // r' \Leftrightarrow 2\lambda + \mu + 4\mu = 0; \quad 2\lambda + 5\mu = 0$  una soluzione è  $\lambda = 5, \mu = -2$

$$\beta: 5x - 2y - 4z - 9 = 0$$

$$\Rightarrow s': \begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ 5x - 2y - 4z - 9 = 0 \end{cases}$$