

LA RETTA

Equazione della retta per due punti.

Dati due punti: $A_1(x_1, y_1, z_1) \neq A_2(x_2, y_2, z_2)$.

1. Supponiamo $x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2 \wedge z_1 \neq z_2$

$$A_1A_2: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t$$

2. Supponiamo $x_1 = x_2 \wedge y_1 \neq y_2 \wedge z_1 \neq z_2$

$$A_1A_2: \begin{cases} x = x_1 \\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \end{cases}$$

3. Supponiamo $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 \neq z_2$

$$A_1A_2: \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

Indichiamo con t il valore comune ai tre rapporti

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

che si chiamano equazioni parametriche della retta.

Si dimostra che tre punti A_1, A_2, A_3 sono allineati se e solo se $\rho \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \leq 2$

Sia α un piano ed A_1, A_2, A_3 tre suoi punti non allineati:

$$A(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e' un'equazione lineare in x, y, z

$\alpha: ax + by + cz + d = 0$ con $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Casi particolari:

1. $a = 0 \Rightarrow \alpha // \vec{x}$

2. $a = b = 0 \Rightarrow \alpha // \vec{xy}$

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \Leftrightarrow \alpha: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

In un piano cartesiano si possono distinguere due pagine. Diremo *pagina positiva* di α quella che guarda la direzione positiva dell'asse \vec{z} (\vec{z}^+) se taglia \vec{z} ; se no, se taglia \vec{y} , sar  quella che guarda \vec{y}^+ ; se no, quella che guarda \vec{x}^+ . Su questa pagina positiva fissiamo, come verso positivo delle rotazioni, quello antiorario.

Siano \vec{r} ed \vec{s} due rette orientate ed incidenti. Chiameremo angolo \widehat{rs} , l'angolo \widehat{rs} sulla pagina positiva del piano. Siano \vec{r} ed \vec{s} due rette orientate e sghembe e siano \vec{r}' ed \vec{s}' le rette parallele e concordi rispettivamente ad \vec{r} ed \vec{s}

$$\widehat{r's'} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{rs}$$

Sia \vec{r} una retta orientata, chiameremo coseni direttori i tre numeri: $\cos \widehat{xr}$; $\cos \widehat{yr}$; $\cos \widehat{zr}$ e numeri direttori tre numeri proporzionali ai coseni direttori.

Sia α un piano ed \vec{n} la normale condotta da O ad α ed orientata in modo che la faccia positiva di α guardi il verso positivo di \vec{n} . Si dimostra che α è rappresentata analiticamente dall'equazione detta normale:

$$x \cos \widehat{x\vec{n}} + y \cos \widehat{y\vec{n}} + z \cos \widehat{z\vec{n}} = p$$

dove $|p| = d(O, \alpha) \Rightarrow$ nell'equazione di un piano $ax + by + cz + d = 0$ i coefficienti a, b, c sono proporzionali ai coseni direttori della normale al piano. Si dimostra

che $\cos \widehat{rs} = \cos \widehat{xr} \cos \widehat{xs} + \cos \widehat{yr} \cos \widehat{ys} + \cos \widehat{zr} \cos \widehat{zs} \Rightarrow$ condizione di perpendicolarità tra due piani $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ è:

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

Siano A_{1x} ed A_{2x} le proiezioni ortogonali di A_1 ed A_2 sull'asse \vec{x} . si ha :

$$A_{1x} A_{2x} = A_1 A_2 \cos \widehat{x\vec{r}} \text{ dove } \vec{r} \text{ è la retta } A_1 A_2 \Rightarrow x_2 - x_1 = \overline{A_1 A_2} \cos \widehat{x\vec{r}}$$

$$\text{In modo analogo: } y_2 - y_1 = \overline{A_1 A_2} \cos \widehat{y\vec{r}}$$

$$z_2 - z_1 = \overline{A_1 A_2} \cos \widehat{z\vec{r}}$$

\Rightarrow i numeri $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ sono numeri direttori di \vec{r} .

\Rightarrow nelle equazioni parametriche di \vec{r} :

$$\vec{r} : \begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \\ z = pt + c \end{cases}$$

i numeri m, n, p sono numeri direttori perché $r \equiv P_1 P_2$, dove $P_1(a, b, c)$ e $P_2(m+a, n+b, p+c)$.

Sia $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ un piano e $P_0(x_0, y_0, z_0)$, si dimostra

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{Se } \vec{r}' : \begin{cases} x = m't + a' \\ y = n't + b' \\ z = p't + c' \end{cases} \quad r \perp r' \Leftrightarrow mm' + nn' + pp' = 0$$

le equazioni della retta $s // r$ passante per P_0 sono:

$$s: \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

$r \perp \alpha \Leftrightarrow a, b, c$ sono proporzionali ad m, n e p ;

$r // \alpha \Leftrightarrow am + bn + cp = 0$;

Se $s \perp \alpha$ passante per $P_0 \Rightarrow s: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$

Se $\beta \perp r$ passante per $P_0 \Rightarrow \beta: m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0$

$$r'' = \alpha \cap \alpha': \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \Rightarrow r'' \perp n \wedge r'' \perp n' \Rightarrow \begin{cases} am'' + bn'' + cp'' = 0 \\ a'm'' + b'n'' + c'p'' = 0 \end{cases}$$

dove m'', n'' e p'' sono i numeri direttori di r'' .

Siano $\alpha: ax + by + cz + d = 0$

e $\alpha': a'x + b'y + c'z + d' = 0$

due piani che si intersecano in una retta r .

Si chiama fascio di piani la totalità dei piani che si ottengono dall'equazione:

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

al variare di λ, μ in \mathbb{R} con $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$

Si dimostra che i piani del fascio sono tutti e soli quelli che passano per r ; r si chiama asse del fascio.

Siano r ed r_1 due rette complanari:

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad r_1: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1 = 0 \end{cases}$$

il piano α al quale esse appartengono è un piano tanto del fascio di asse r , quanto

del fascio di asse $r_1 \Rightarrow$ il sistema $\begin{cases} \lambda a + \mu a' = \lambda_1 a_1 + \mu_1 a'_1 \\ \lambda b + \mu b' = \lambda_1 b_1 + \mu_1 b'_1 \\ \lambda c + \mu c' = \lambda_1 c_1 + \mu_1 c'_1 \\ \lambda d + \mu d' = \lambda_1 d_1 + \mu_1 d'_1 \end{cases}$ deve ammettere

soluzioni non nulle.

Allora, le rette r ed r_1 sono complanari $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \end{vmatrix} = 0$