

### ESERCIZIO N° 1

Stabilire per quali valori del parametro reale  $h$  la seguente matrice ha rango  $0,1,2,3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & h & 2 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix}$$

---

Riduciamo  $A$  per righe:

$$A \xrightarrow[\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{matrix}]{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & 1+h & 0 & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+h & 0 & 2h \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix}$$

Per  $h = 0$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  è ridotta ed ha due righe non nulle  $\Rightarrow \rho(A) = 2$

Per  $h \neq 0$   $A$  non è ridotta

Usando la trasformazione  $R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2$  si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+h & 0 & 2h \\ 0 & \frac{h-1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per  $h = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  è ridotta ed ha due righe non nulle  $\Rightarrow \rho(A) = 2$

per  $h \neq 0, 1$  tutte le righe sono non nulle  $\Rightarrow \rho(A) = 3$

## ESERCIZIO N° 2

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Riduciamo dapprima il sistema, la matrice completa è:

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2z = -1 \\ -2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \left( 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Si poteva risolvere con la regola di Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1(1+1) + 1(-1-1) = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$  il sistema ammette una ed una sola soluzione  $\left( 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  che si ottiene così:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2}$$

### **ESERCIZIO N° 3**

Discutere, al variare del parametro  $k$ , il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx + (k-1)y + 2kz = k^2 - 1 \\ kx + ky = 1 - k \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

---

E' un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite.

Il determinante  $D$  del sistema è

$$D = \begin{vmatrix} k & k-1 & 2k \\ k & k & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = k \cdot 2k - (k-1)2k + 2k(k-2k) = -2k(k-1)$$

Per  $k \neq 0, 1$  il sistema (per Cramer) ammette una ed una sola soluzione.

Per  $k=0$

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \rho(A) = 2, \rho(A, B) = 3 \Rightarrow \text{il sistema è impossibile;}$$

infatti:

$$\begin{cases} -y = -1 \\ 0 = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

Per  $k=1$

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \rho(A) = \rho(A, B) = 2 \Rightarrow \text{il}$$

sistema ammette  $\infty^{3-2} = \infty^1$  soluzioni; infatti:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad (-2z, 2z, z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

### ESERCIZIO N° 4

Discutere, al variare dei parametri  $a, b \in \mathbb{R}$ , il sistema lineare:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

E' un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite.

Il determinante D del sistema è

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a(a^2b - b) - b(a - 1) + b - ab = b(a^3 - 3a + 2) = b(a - 1)(a^2 + a - 2) \\ = b(a - 1)^2(a + 2).$$

- 1.** Per  $b \neq 0 \wedge a \neq 1, -2$  il sistema ammette una ed una sola soluzione che si può determinare con il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}}{b(a - 1)^2(a + 2)} = \frac{a^2b + b + b^2 - ab - ab^2 - b}{b(a - 1)^2(a + 2)} = \frac{b(a - 1)(a - b)}{b(a - 1)^2(a + 2)} = \frac{a - b}{(a - 1)(a + 2)};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{b(a - 1)^2(a + 2)} = \frac{a^2b + 1 + 1 - b - a - a}{b(a - 1)^2(a + 2)} = \frac{(a - 1)(ab + b - 2)}{b(a - 1)^2(a + 2)} = \frac{ab + b - 2}{b(a - 1)(a + 2)};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}}{b(a - 1)^2(a + 2)} = \frac{a^2b + b^2 + b - ab - b - ab^2}{b(a - 1)^2(a + 2)} = \frac{b(a - 1)(a - b)}{b(a - 1)^2(a + 2)} = \frac{a - b}{(a - 1)(a + 2)}.$$

- 2.** Per  $b = 0 \rightarrow$  la matrice completa del sistema è:  $(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array} \right)$

Tutte le sue sottomatrici del terzo ordine contenenti la seconda colonna avrebbero determinante nullo; allora, consideriamo M, quella formata dalle colonne 1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a - 1 + a - 1 = 2(a - 1)$$

➤ allora se  $a = 1$  anche questo determinante sarebbe nullo  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\text{per } b = 0 \wedge a = 1} \rightarrow (A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\rho(A, B) = 2 \quad \rho(A) = 1 \Rightarrow$  il sistema è impossibile (Teorema di Rouchè - Capelli).

➤ per  $a \neq 1 \Rightarrow \rho(A, B) = 3$ , ma  $\rho(A) = 2 \Rightarrow \boxed{\text{per } b = 0 \wedge a \neq 1}$   
il sistema è impossibile

**3.** Per  $a = 1 \rightarrow (A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \\ R_3 \rightarrow R_1 - R_3 \end{smallmatrix}]{\rightarrow} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

➤ Se  $b \neq 1$  il sistema è impossibile poiché  $A$  e  $(A, B)$  sono ridotte e  $A$  ha una sola riga non nulla e  $(A, B)$  ha due righe non nulle  $\Rightarrow \rho(A, B) = 2 \neq \rho(A) = 1$ ; infatti si ha :

$$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = b - 1 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

➤ se  $b = 1$  il sistema è indeterminato ed ammette  $\infty^{3-1} = \infty^2$  soluzioni, le soluzioni della equazione  $x + y + z = 1 \rightarrow (x, y, 1-x-y) \quad x, y \in \mathbb{R}$

**4.** per  $a = -2$

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2+b \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2 + R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+b \end{array} \right) \quad \text{che è ridotta}$$

➤ Se  $b \neq 2$  il sistema è impossibile poiché  $A$  e  $(A, B)$  sono ridotte e  $A$  ha due righe non nulle e  $(A, B)$  ha tre righe non nulle  $\Rightarrow \rho(A, B) = 3 \neq \rho(A) = 2$ ; infatti si ha:

$$\begin{cases} -2x + by + z = 1 \\ 3by - 3z = -2b - 1 \\ 0 = -2(b - 2) \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

➤ se  $b = 2$  il sistema è indeterminato ed ammette  $\infty^{3-2} = \infty^1$  soluzioni:

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 1 \\ -6y + 3z = +5 \end{cases} \quad \left( \frac{3z-4}{3}, \frac{3z-5}{6}, z \right) \quad z \in R$$