

### ESERCIZIO N° 1

In  $\mathbb{R}^4$  è assegnato il sottoinsieme  $V = \{(x, x - 2y, y, t), x, y, t \in \mathbb{R}\}$ . Verificare che  $V$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  e trovare una sua base.

Trovare un sottospazio  $S$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che  $V \oplus S = \mathbb{R}^4$ .

---

Per le proprietà che caratterizzano i sottospazi proviamo :

$$1) (x_1, x_1 - 2y_1, y_1, t_1), (x_2, x_2 - 2y_2, y_2, t_2) \in V \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1, x_1 - 2y_1, y_1, t_1) + (x_2, x_2 - 2y_2, y_2, t_2) \in V$$

infatti,

$$(x_1, x_1 - 2y_1, y_1, t_1) + (x_2, x_2 - 2y_2, y_2, t_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 - 2(y_1 + y_2), y_1 + y_2, t_1 + t_2) \in V$$

$$2) a \in \mathbb{R}, (x, x - 2y, y, t) \in V \Rightarrow a(x, x - 2y, y, t) \in V$$

infatti,  $a(x, x - 2y, y, t) = (ax, ax - 2ay, ay, at) \in V$

$$3) \text{ per } x = y = t = 0 \Rightarrow (0, 0, 0, 0) \in V$$

$\Rightarrow V$  è un sottospazio.

$$x = 1, y = t = 0 \Rightarrow v_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$y = 1, x = t = 0 \Rightarrow v_2 = (0, -2, 1, 0)$$

$$t = 1, x = y = 0 \Rightarrow v_3 = (0, 0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow E = \{(1, 1, 0, 0), (0, -2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \text{ base di } V.$$

Completiamo  $E$  ad una base di  $\mathbb{R}^4$ ; potremmo usare il metodo degli scarti successivi estraendo da  $\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3, e_4\}$  una base. La matrice

$$\text{riga aggiunta} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è ridotta (anzi triangolare alta), nessuna riga è nulla  $\Rightarrow S = L((0, 0, 1, 0))$

## **ESERCIZIO N° 2**

Sia  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione definita da  $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_1)$ .

Determinare la matrice associata a  $\varphi$ ,  $M(\varphi)$ , rispetto alle due basi canoniche.

Determinare la matrice associata a  $\varphi$ ,  $M_{E, F}(\varphi)$ , rispetto alle due basi:

$$E = \{(1, 1), (0, -1)\} \text{ di } \mathbb{R}^2$$

$$F = \{(1, 1, 1), (1, -2, 0), (0, 0, 1)\} \text{ di } \mathbb{R}^3$$

---

La matrice  $M(\varphi)$ , avente per colonne  $\varphi(e_1)$  e  $\varphi(e_2)$ , dove  $e_1 = (1, 0)$  ed  $e_2 = (0, 1)$  sono i versori fondamentali di  $\mathbb{R}^2$ , si definisce matrice associata a  $\varphi$  rispetto alle basi canoniche rispettivamente di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ :

$$\varphi(1, 0) = (1, 1, 1)$$

$$\varphi(0, 1) = (1, -2, 0)$$

$$\text{allora: } M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{che risulta essere la matrice incompleta del sistema}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$

La matrice  $M_{E, F}(\varphi)$ , rispetto alle due basi  $E$  ed  $F$  ha per colonne le componenti di  $\varphi(1, 1)$  e  $\varphi(0, -1)$  rispetto alla base  $F$ .

Calcoliamo queste componenti.

Bisogna determinare una terna di numeri reali  $(\alpha, \beta, \gamma)$  in modo tale che

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -2, 0) + \gamma(0, 0, 1) = \varphi(1, 1) = (2, -1, 1)$$

e un'altra terna (che per comodità continuiamo ad indicare con  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ) tale che

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -2, 0) + \gamma(0, 0, 1) = \varphi(0, -1) = (-1, 2, 0)$$

Poiché  $\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -2, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (\alpha + \beta, \alpha - 2\beta, \alpha + \gamma)$ , possiamo risolvere contemporaneamente i due sistemi nel seguente modo:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = (2, -1) \\ \alpha - 2\beta = (-1, 2) \\ \alpha + \gamma = (1, 0) \end{cases} \quad \text{da cui si ottiene facilmente che:} \quad \begin{cases} \alpha = (1, 0) \\ \beta = (1, -1) \\ \gamma = (0, 0) \end{cases}$$

$$\varphi(1, 1) = (2, -1, 1) = 1 \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (1, -2, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$

$$\varphi(0, -1) = (-1, 2, 0) = 0 \cdot (1, 1, 1) + (-1) \cdot (1, -2, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$

si ha quindi:  $M_{E, F}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (osserviamo che la matrice  $M_{E, F}(\varphi)$  ha per righe

rispettivamente  $\alpha, \beta, \gamma$ ).

### **ESERCIZIO N° 3**

Sia  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita da

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + x_2 + x_3).$$

Determinare la  $\dim \text{Im} \varphi$  e una base di  $\text{Im} \varphi$ .

Determinare la  $\dim \text{Ker} \varphi$  e una base di  $\text{Ker} \varphi$ .

$\text{Im} \varphi$  è il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dalle colonne di  $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Per trovare una base di  $\text{Im} \varphi$  dobbiamo ridurre  $M(\varphi)$  per colonne:

$$M(\varphi) \xrightarrow{c_3 \rightarrow c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \rightarrow c_3 + c_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \text{Im} \varphi = 2 \Rightarrow \{(1, 0, 1, 2), (1, 1, 0, 1)\}$$

è una base di  $\text{Im} \varphi$ .

$\dim \text{Ker} \varphi = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \varphi$  non è iniettiva.

$\text{Ker} \varphi$  coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$M(\varphi) \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases} \quad (-y, y, y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

$\{-1, 1, 1\}$  è una base di  $\text{Ker}\varphi$ .

#### **ESERCIZIO N° 4**

Nello spazio vettoriale  $R_2[x]$  dei polinomi di grado  $\leq 2$  a coefficienti in  $R$  sono dati i vettori:

$$p_1 = x^2 + 2x + 1, \quad p_2 = 2x^2 + kx, \quad p_3 = kx^2 - x - 3.$$

Determinare i valori di  $k$  per cui  $p_1, p_2, p_3$ :

- formano una base  $B$  di  $R_2[x]$ ;
- risultano linearmente dipendenti e trovare la relazione di dipendenza lineare.

Nel caso  $k = 0$

- trovare le componenti di  $x^2$  rispetto alla base  $B$ ;
- considerata l'applicazione lineare  $f_\lambda : R_2[x] \rightarrow R_2[x]$  definita da  $f_\lambda(p) = p - \lambda p'$  con  $\lambda \in R$ . Trovare i valori di  $\lambda$  per cui essa è un isomorfismo.

---

a)  $p_1 = (1, 2, 1), p_2 = (2, k, 0), p_3 = (k, -1, -3)$

la relazione di dipendenza lineare si traduce analiticamente nell'equazione:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ k & -1 & -3 \end{vmatrix} = -k^2 - 3k + 10 = 0 \Rightarrow k_1 = -5 \vee k_2 = 2;$$

per  $k \neq -5, 2$   $p_1, p_2, p_3$  sono linearmente indipendenti.

b) se  $k = 2 \Rightarrow a(x^2 + 2x + 1) + b(2x^2 + 2x) + c(2x^2 - x - 3) = 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow$   
 $(a + 2b + 2c)x^2 + (2a + 2b - c)x + a - 3c = 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + 2b + 2c = 0 \\ 2a + 2b - c = 0 \text{ (questa eq. è la somma delle altre due)} \\ a - 3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3c \\ 3c + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3c \\ b = -\frac{5}{2}c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a = -6 \\ b = 5 \end{cases} \quad \text{è una delle infinite soluzioni}$$

per  $k = -5$  si trova in maniera analoga  $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

$$c) x^2 = a(x^2 + 2x + 1) + b \cdot 2x^2 + c(-x - 3) = (a+2b)x^2 + (2a-c)x + a-3c = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=1 \\ 2a-c=0 \\ a-3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=0 \end{cases} \quad x^2 = (0, \frac{1}{2}, 0)_B$$

d)

$$f_\lambda(e_1) = f_\lambda(x^2) = x^2 - 2\lambda x;$$

$$f_\lambda(e_2) = f_\lambda(x) = x - \lambda;$$

$$f_\lambda(e_3) = f_\lambda(1) = 1$$

la matrice associata ad  $f_\lambda$  rispetto alle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 1 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = \dim \text{Im} f = 3 \Rightarrow \dim \text{Ker} f = 0$$

$\Rightarrow f$  è un isomorfismo.

Un'alternativa più lunga è:

$$p_1' = 2x + 2 \quad p_2' = 4x \quad p_3' = -1$$

$$f_\lambda(p_1) = x^2 + 2x + 1 - \lambda(2x + 2) = x^2 + 2(1 - \lambda)x + 1 - 2\lambda$$

$$f_\lambda(p_2) = 2x^2 - 4\lambda x$$

$$f_\lambda(p_3) = -x - 3 + \lambda$$

la matrice associata ad  $f_\lambda$  rispetto alla base B e a quella canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2(1-\lambda) & -4\lambda & -1 \\ 1-2\lambda & 0 & -3+\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4\lambda(-3+\lambda) - 2[2(1-\lambda)(-3+\lambda) + 1 - 2\lambda] = 10 \neq 0$$

$\Rightarrow \rho(A) = \dim \text{Im} f_\lambda = 3 \Rightarrow \dim \text{Ker} f_\lambda = 0 \Rightarrow f_\lambda$  è un isomorfismo.

### **ESERCIZIO N° 5**

Studiare al variare dei parametri  $a, b \in \mathbb{R}$ , l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definita da:

$$f(e_1) = (1, 1, a, 1); f(e_2) = (a, 1, 2, 0); f(e_3) = (1 - a, 0, 1, b).$$

La matrice associata a  $f$  è: \_\_\_\_\_

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Un minore di ordine 2 non nullo è:  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

I minori di ordine 3 contenenti questo minore sono:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 2b + 1 - ab$$

determiniamo i valori di a e b per cui si annullano contemporaneamente

$$\begin{cases} (1-a)^2 = 0 \\ 2b+1-ab=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

□  $\boxed{\text{per } a=1 \wedge b=-1}$ , per il teorema di Kronecker per il rango di una matrice si ha:  $\rho(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e } \text{Im}f = \mathbb{L}((1, 1, 2, 0), (0, 0, 1, -1))$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda + h \\ t = -h \end{cases} \quad \text{eq. parametriche di Im}f;$$

eliminando h e  $\lambda$  si ottengono le eq. cartesiane di Imf:  $\begin{cases} y = x \\ z = 2x - t \end{cases}$ .

$$\dim \text{Ker}f = 3 - 2 = 1$$

Ker f è l'insieme soluzione di  $\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow (x, -x, x), \quad x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \text{Ker}f = \mathbb{L}((1, -1, 1))$$

□ Se  $\boxed{a \neq 1 \vee b \neq -1}$   $\Rightarrow \rho(A)=3 \Rightarrow \dim \text{Im}f = 3 \Rightarrow \dim \text{Ker}f = 0 \Rightarrow f$  è iniettiva

$$\Rightarrow \text{Im}f: \begin{vmatrix} 1 & a & 1-a & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ a & 2 & 1 & z \\ 1 & 0 & b & t \end{vmatrix} = 0$$

una base è l'insieme costituito dai vettori colonna di A.

### ESERCIZIO N° 6

Studiare al variare del parametro  $a$  l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da:  
 $f(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$ ,  $f(0, 1, 2) = (a, a^2, a)$ ,  $f(1, -1, 0) = (1, a, -1)$ .

Determinare, in particolare, al variare di  $a$

- 1) Kerf, Imf;
- 2) La matrice associata alla  $f$  rispetto alle basi canoniche,  $E$ ;
- 3) L'immagine inversa del vettore  $(a+2, 3, a)$

Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 2), (1, -1, 0) \} \text{ è una base di } \mathbb{R}^3.$$

La matrice associata alla  $f$  rispetto alla base  $B$  e alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -a^2 + a + a^2 - a^2 - a^2 + a = -2a^2 + 2a = 2a(1 - a)$$

□ Se  $a \neq 0, 1 \Rightarrow \text{Im}f = \mathbb{R}^3$  perché  $\dim \text{Im}f = \rho(A) = 3 \Rightarrow \text{Ker}f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow f$  è un isomorfismo.

□ Se  $a = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(A) = 2 \Rightarrow \dim \text{Im}f = 2 \Rightarrow \dim \text{Ker}f = 1$  le

equazioni cartesiane di Kerf sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, y, 0) \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \text{Ker}f = L((0, 1, 0))$$

$\text{Im}f = L((1, 1, 1), (1, 0, -1))$  e la sua equazione cartesiana è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$$

□ Se  $a = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(A) = 2$

$\Rightarrow \text{Im}f = L((1, 1, 1), (1, 1, -1))$  e la sua equazione cartesiana è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - y = 0$$

Kerf è rappresentato analiticamente dal sistema

$$\frac{\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}}{2z=0} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad (x, -x, 0) \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f = L((1, -1, 0))$$

$$2) f(1, 0, 0) = f(e_1) = (1, 1, 1)$$

$$f(0, 1, 2) = f(0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3) \stackrel{f \text{ è lineare}}{=} 1f(e_2) + 2f(e_3) = (a, a^2, a)$$

$$\rightarrow 2f(e_3) = (a, a^2, a) - f(e_2)$$

$$f(1, -1, 0) = f(e_1) - f(e_2) = (1, a, -1)$$

$$\rightarrow f(e_2) = f(e_1) - (1, a, -1)$$

$$\rightarrow f(e_2) = (0, 1-a, 2), \quad f(e_3) = \left( \frac{a}{2}, \frac{a^2+a-1}{2}, \frac{a-2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow M_{E,E}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 1 & 1-a & \frac{a^2+a-1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{a-2}{2} \end{pmatrix}$$

3) per  $\boxed{a \neq 0, 1}$

$f^{-1}(a+2, 3, a)$  è l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x + \frac{a}{2}z = a+2 \\ x + (1-a)y + \frac{a^2+a-1}{2}z = 3 \\ x + 2y + \frac{a-2}{2}z = a \end{cases}$$

che si può risolvere con la regola di Cramer.

Un'alternativa più lunga è:

$f^{-1}(a+2, 3, a)$  ha per componenti, rispetto alla base B, l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x + ay + z = a+2 \\ x + a^2y + az = 3 \\ x + ay - z = a \end{cases}$$

che si può risolvere con la regola di Cramer.

Per  $\boxed{a=0}$   $(2, 3, 0)$  non è soluzione di  $x - 2y + z = 0 \Rightarrow (2, 3, 0) \notin \text{Im } f \Rightarrow$   
non esiste  $f^{-1}(2, 3, 0)$ .

Analogamente per  $a=1$ .